CAPÍTULO

13

VARIABLES NOMINALES: LAS DISTRIBUCIONES DE LA CHI CUADRADA Y BINOMIAL

Introducción: el pensamiento proporcional sobre la posición social

En la investigación científica social y del comportamiento, las variables con niveles de medición nominal y ordinal se utilizan con frecuencia. En particular, se realiza mucha investigación sobre cómo el estatus social de los individuos en grupos y en sociedades afecta sus oportunidades en la vida cotidiana. Las posiciones sociales tienen *estatus*, una palabra griega que significa "rango o posición dentro de un grupo". El estatus social define las cantidades relativas de privilegio y autoridad otorgadas a cualquier persona que ocupe una posición dentro de un grupo, comunidad o sociedad. Una persona que ocupa una posición de alto estatus, como un presidente corporativo, obtiene más derechos, recompensas y privilegios de los que se otorgan a los individuos con posiciones de bajo rango, como los programadores de computadoras.

Cada individuo ocupa una variedad de estatus, como estudiante, esposo, padre, tesorero del club y secretario de oficina. Algunos estatus sociales están abiertos para elegirse y pueden ganarse; aunque la competencia por ellos resulte difícil. Éstos se llaman estatus logrados e incluyen posiciones como marido, doctor y vicepresidente bancario. Otras posiciones de estatus se atribuyen —se asignan o "se estampan" en los individuos desde su nacimiento. Por ejemplo, ser hombre y blanco tiene sus privilegios en la sociedad estadunidense; pero (a menos que sufra un cambio de sexo o color) estas condiciones son fijas y no se eligen. Los estatus atribuidos son fácilmente identificables ya que los indicadores físicos como el color de la piel y los rasgos biológicos distintivos de sexo o herencia étnica. La investigación biológica es incierta respecto de los efectos de los estatus atribuidos en el comportamiento. Por ejemplo, no está claro si las mujeres son en verdad más emocionales que los hombres; pero es importante entender los efectos de los estatus atribuidos porque tienen consecuencias para los individuos. Ya sea que los hombres o las mujeres sean más emocionales es secundario: si el mito señala que las mujeres lo son, éste se cree ampliamente. Los estatus atribuidos son indicadores sociales que, por ejemplo, afectan a cómo se trata a las mujeres y a miembros de grupos minoritarios. Los estatus limitan las oportunidades para aquellos que ocupan posiciones minoritarias, como es evidente a la luz del racismo y del sexismo. En una nota positiva, puesto que los estatus atribuidos a menudo son visibles, son convenientes hacer que un producto destaque y para enfocar intervenciones sociales. Por ejemplo, los clubes de golf se anuncian en revistas orientadas hacia hombres; las campañas de examen de cáncer de mama, en revistas orientadas hacia mujeres.

A causa de la importancia del estatus, la investigación social a menudo empieza determinando los efectos de las variables de estatus en las variables dependientes de un estudio. Por ejemplo, en estudios del comportamiento criminal, las primeras hipótesis en probarse quizá tendrán que ver con relaciones demográficas. (La demografía es el estudio de la población de una sociedad.) ¿Los actos criminales serán cometidos más probablemente por hombres o mujeres, jóvenes o viejos, en áreas rurales o urbanas, etcétera? Una vez que se calculan los estadísticos, resulta vital que se interpreten estadísticamente —como porcentajes de un grupo de observaciones—, en lugar de individualmente. Por ejemplo, las estadísticas del Departamento de Justicia de Estados Unidos revelan de forma consistente que los hombres son arrestados por casi el 90 por ciento de los crímenes violentos. Sin embargo, esto no significa que cada hombre sea un delincuente potencial o que las mujeres no cometan delitos. Una interpretación adecuada indica que los hombres tienen una mayor probabilidad de cometer un crimen violento. Interpretar los datos de otra manera sería estereotipar —aplicar una generalización estadística a un individuo. Los estereotipos se vuelven comunes dentro de cada sociedad y llevan a prejuicios e injusticias. Por ejemplo, si un policía aprehendiera a un hombre y una mujer acusados de asaltar un banco, ¿podría la mujer haber sido el autor intelectual y líder del plan? La tendencia es asumir que ese rol lo desempeña el hombre.

La investigación sobre el estatus tiene el potencial de reforzar los estereotipos y, por consiguiente, debe tenerse cuidado para evitar esta falla. Cuando se reportan los estadísticos como caracterizaciones de individuos en lugar de reportarlas como generalizaciones probabilísticas, abundan las malas interpretaciones de los datos. Por ejemplo, en un perfil demográfico de las personas sin hogar en Midcity, Estados Unidos, puede ser que los datos revelen que el 70 por ciento de las personas sin hogar en la comunidad son hombres, 60 por ciento son afroamericanos y 50 por ciento son drogadictos. Sería un error reportar que la típica persona sin hogar en Midcity es un hombre afroamericano adicto a las drogas o al alcohol. De hecho, quizá suceda que las mujeres sin hogar más probablemente sufran de abuso de sustancias, debido a que hay más probabilidad que las mujeres que están desamparadas pero que no son adictas reciban alojamiento por parte de parientes. Los investigadores científicos deben tener cuidado de no reforzar los estereotipos. El aspecto clave de la imaginación estadística consiste en percibir las observaciones aisladas en relación a un todo más grande.

Este capítulo se enfoca en las variables nominales, muchas de las cuales son indicadores del estatus. Se empieza con la prueba chi cuadrada de la relación entre dos variables nominales. Se interpretarán con cautela los descubrimientos usando el lenguaje de las proporciones y los porcentajes del grupo completo. Las conclusiones serán sobre la categoría (es decir, el grupo), no sobre el individuo. Además, los hallazgos reflejarán con precisión las complejas relaciones entre las variables. Dichas precauciones son importantes porque en la prensa popular se establecen muchas relaciones entre los indicadores de estatus como género, raza e identidad étnica, y otros fenómenos consecuentes como las tasas de crímenes. El hecho de no presentar resultados de una manera proporcional se agrega a las desventajas de

estatus de las minorías como la afroamericana, árabe americana y la de las mujeres. En otras palabras, los reportes populares a menudo carecen de la imaginación estadística. Este capítulo también cubre la prueba de la distribución binomial que es una prueba de proporciones para muestra pequeña.

La prueba chi cuadrada: enfoque en las frecuencias de las ocurrencias conjuntas

Al examinar la relación entre dos variables nominales, el enfoque está en la frecuencia de las ocurrencias conjuntas de los atributos. La existencia de una relación entre las variables se establece mediante una prueba de hipótesis llamada la prueba chi cuadrada.

Recuerde que un atributo constituye alguna cualidad o característica de un sujeto que se transmite como los nombres de las categorías de una variable nominal. Para el género existen los atributos hombre y mujer; para la raza, los atributos podrían codificarse como blanco, afroamericano, asiático americano, etcétera; para la preferencia de partidos políticos, los atributos serían demócrata, republicano e independiente. Una ocurrencia conjunta de atributos involucra dos variables *para un solo individuo*, con apareamientos de los atributos de las dos variables. Por ejemplo, los posibles apareamientos de los atributos para las variables raza y preferencia hacia un partido político son blanco-demócrata, blanco-independiente, afroamericano-demócrata, blanco-republicano, afroamericano-republicano y afroamericano-independiente. Si existe una relación entre la raza y la afiliación al partido político, esperamos encontrar que las mayores proporciones de una raza prefieran la afiliación a un partido que a otro. Podría hipotetizarse que proporciones más altas de afroamericanos se identifican como demócratas. Si esto es verdadero, en una muestra aleatoria de adultos estadunidenses esperaríamos encontrar frecuencias especialmente altas de la ocurrencia conjunta afroamericano-demócrata.

La relación entre dos variables nominales se analiza usando una tabulación cruzada que reporta las frecuencias (no las proporciones) de las ocurrencias conjuntas de los atributos. En el capítulo 2 se introdujeron las tabulaciones cruzadas (valdría la pena repasar la tabla 2-9). Para las pruebas de hipótesis colocamos los atributos de la variable independiente en las columnas; y los de la variable dependiente, en las filas. En la siguiente tabulación cruzada (tabla 13-1, datos ficticios), la

TABLA 13-1 Preferencia hacia un partido político por raza (Frecuencias esperadas de las casillas en paréntesis)

Partido político (Y) / *Raza (X) →*	*Blanca*	*Afroamericana*	*Totales por fila*
Demócrata	96 (112.5)	54 (37.5)	150
Republicano	123 (112.5)	27 (37.5)	150
Independiente/otro/ninguno	81 (75.0)	19 (25.0)	100
Totales por columna	300 (300)	100 (100)	400

variable predictora es la raza, con dos categorías: blanco y afroamericano. La variable dependiente es la preferencia a un partido político, con las categorías demócrata, republicano e independiente/otro/ninguno.

A esto le llamamos una tabla de 2×3 (expresada "dos por tres") para indicar el número de categorías de cada variable.

Los cuadros en la parte central de la tabla se llaman *casillas;* y los números en ellas, representan *frecuencias conjuntas* o *frecuencias de casillas*. Las casillas en los márgenes del lado derecho e inferior presentan los *totales marginales*, el número total de sujetos que componen una categoría. El tamaño total de la muestra, o el *gran total*, es 400, el cual se reporta en la casilla inferior derecha. Los totales marginales a la derecha indican los totales por fila, con 150 casos en cada uno de los partidos demócrata y republicano y 100 en la categoría independiente/otro/ninguno para sumar un gran total de 400 encuestados. Los totales marginales en la parte inferior indican los totales por columna, donde 300 sujetos de la muestra son blancos, y 100 afroamericanos, sumando de nuevo el gran total de 400. Las casillas en la parte central de la tabulación cruzada representan las frecuencias conjuntas de las categorías sobre y enfrente de la casilla. Por ejemplo, 96 sujetos de la muestra son blancos y demócratas, 123 son blancos y republicanos, 54 son afroamericanos y demócratas, y así sucesivamente.

Podemos decir, entonces, que la frecuencia conjunta de blanco-demócrata es de 96 casos, la frecuencia conjunta de blanco-republicano es de 123 casos, etcétera. El número de filas por el número de columnas representa el número de casillas de frecuencias conjuntas, con seis en una de tabla 2×3.

Como con cualquier prueba de hipótesis, la hipótesis debe enunciarse de forma que nos permita saber qué resultados de la muestra esperar cuando la hipótesis sea verdadera. Con la prueba chi cuadrada, se enuncia la hipótesis estadística como una de "no relación" entre las dos variables. (Esto puede llamarse una *hipótesis nula* puesto que establece una *no* relación.) Como se verá en un momento, cuando tal sea el caso, el estadístico chi cuadrada resultará cero con cierto error de muestreo. Así, enunciamos nuestra hipótesis estadística como sigue:

$$H.\ est.: \chi^2 = 0$$

Es decir, no existe una relación entre la raza y la preferencia hacia un partido político. La hipótesis alternativa quedaría así:

$$H.\ alt.: \chi^2 > 0$$

Es decir, existe una relación entre la raza y la preferencia hacia un partido político. De una cola pero no direccional.

Como con cualquier hipótesis estadística, esta declaración permite predicciones de resultados con el muestreo repetido. En este caso, al asumir que no existe una relación, podemos utilizar las frecuencias marginales para predecir las *frecuencias esperadas* de cada casilla. Después comparamos estas frecuencias esperadas con las *frecuencias observadas*, que son las frecuencias conjuntas encontradas en los datos de la muestra en cuestión y presentadas en la tabulación cruzada. Si las frecuencias observadas resultan casi iguales a las esperadas, con cierto error de muestreo, se mantiene la hipótesis de "no relación" y se concluye que la raza no tienen nada que ver con la preferencia hacia un partido político. No obstante, si existe una diferencia grande entre las frecuencias observadas y las esperadas, se comienza a sospechar que existe una relación entre las variables. La prueba de hipótesis de la chi cuadrada nos indica si la suma de las diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas son tan grandes que simplemente no son el resultado del error de muestreo. Como se discutirá en detalle más adelante, la prueba es no direccional. Sin embargo, cualquier prueba chi cuadrada es de una cola, porque este estadístico se basa en números elevados al cuadrado, los cuales siempre resultan positivos.

Una nota al especialmente inquisitivo

A diferencia de las pruebas revisadas con anterioridad, la hipótesis estadística para la chi cuadrada no declara directamente el valor de un parámetro poblacional. No obstante, esta prueba afirma que ciertas medidas —las frecuencias conjuntas— tienen valores específicos en la población: aquéllos de las frecuencias esperadas.

Cálculo de las frecuencias esperadas

¿Cómo se calculan las frecuencias esperadas? En la tabla 13-1 se observa que tres cuartos (300 de 400) de los sujetos de la muestra son blancos. Podemos predecir que *si la raza no tiene nada que ver con la preferencia hacia los partidos políticos, es decir, si no existe una relación entre la raza y la preferencia hacia partidos políticos*, podemos esperar que tres cuartos de los demócratas, tres cuartos de los republicanos, y tres cuartos del grupo clasificado como independiente/otro/ninguno sean blancos. En otras palabras, los blancos serán representados entre los partidos políticos en proporción a sus números en la población general. De igual forma, puesto que un cuarto de la muestra se compone de afroamericanos, podemos esperar que un cuarto de cada una de las categorías de la variable partido político sea afroamericano. Las frecuencias esperadas de las casillas nos indican cuántos casos deben caer en una casilla si cada casilla mantiene una proporción con respecto a las frecuencias marginales —la situación que se da cuando las dos variables no están relacionadas y en la cual las casillas se llenan de manera aleatoria.

La frecuencia esperada, *E*, se calcula para cada casilla con la siguiente fórmula:

Cálculo de las frecuencias esperadas de las casillas de una tabulación cruzada

$$E_{casilla} = \frac{(\text{total marginal por columna para la casilla})(\text{total marginal por fila para la casilla})}{\text{gran total}}$$

donde

$E_{casilla}$ = frecuencia esperada de una casilla

total marginal por columna para la casilla = total de casos para la categoría en la columna de la casilla

total marginal por fila para la casilla = total de casos para la categoría en la fila de la casilla

gran total = tamaño total de la muestra

Por ejemplo, la frecuencia esperada de demócratas blancos es

$$E_{(\text{blanco-demócrata})} = \frac{(\text{número total de blancos})\ (\text{número total de demócratas})}{\text{gran total}}$$

$$= \frac{(300)\ (150)}{(400)} = 112.5 \text{ casos}$$

Diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas

Con todas las pruebas de hipótesis, la diferencia entre aquello que se observa en los datos de la muestra en cuestión y lo que se hipotetiza para la hipótesis estadística constituye el "efecto" de la prueba. El cálculo del estadístico de la chi cuadrada se basa en la medición de las diferencias entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas. Las frecuencias esperadas son las frecuencias conjuntas que ocurrirán en el muestreo repetido, cuando *no* existe relación entre las dos variables. Como en muchas fórmulas estadísticas, dichas diferencias se ubican en el numerador del estadístico de la prueba. De forma similar, el denominador de la mayoría de los estadísticos de las pruebas es una medida del error de muestreo normal, cuando la hipótesis estadística es verdadera. Así, las frecuencias esperadas se emplean en el denominador.

Cálculo del estadístico de la prueba chi cuadrada

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

donde

χ^2 = una medida de la probabilidad de las diferencias entre las frecuencias observadas y esperadas
O = frecuencia observada de una casilla
E = frecuencia esperada de una casilla

La tabla 13-2 presenta una hoja de cálculo de computadora para calcular el estadístico de la chi cuadrada. Los datos vienen de la tabla 13-1.

Una revisión cercana a esta fórmula ofrece un sentido de proporción sobre cómo sus valores se relacionan con los resultados estadísticos reales. Cuando los efectos (es decir, las diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas) son grandes, ello sugiere que los casos no se distribuyen aleatoriamente entre las casillas y que debe rechazarse la hipótesis estadística. Aparecen grandes diferencias cuando algunas de las casillas (a menudo las casillas en las esquinas diagonales opuestas) "se cargan" a causa de una relación entre las dos variables. Analicemos más estrechamente una de las diferencias de casilla. La "frecuencia observada" real de demócratas blancos es de 96 casos. La diferencia entre la frecuencia observada de 96 y la frecuencia esperada de 112.5 es –16.5 casos (es decir, aproximadamente 17 menos

TABLA 13-2 **Hoja de cálculo por computadora para calcular el estadístico chi cuadrada usando los datos de la tabla 13-1**

Especificaciones		Cálculos			
Casilla (X, Y)	*O*	*E*	*(O – E)*	*(O – E)²*	*[(O – E)²/E]*
Blanco demócrata	96	112.5	–16.5	272.25	2.42
Afroamericano demócrata	54	37.5	16.5	272.25	7.26
Blanco republicano	123	112.5	10.5	110.25	.98
Afroamericano republicano	27	37.5	–10.5	110.25	2.94
Blanco independiente	81	75.0	6.0	36.0	.48
Afroamericano independiente	19	25.0	–6.0	36.0	1.44
Totales	400	400.0	0.0		$\chi^2 = 15.52$

que lo esperado dados los números globales de demócratas y blancos). Parece que los blancos están subrepresentados entre los demócratas en proporción a sus números en la población general. Como lo veremos más adelante, efectos similares de la raza en la preferencia hacia un partido político aparecen en otras casillas.

Resulta necesario considerar, sin embargo, la posibilidad de que las diferencias para esta casilla y otras sea resultado del error de muestreo debido al azar. Aun cuando no existe una relación entre la raza y la preferencia hacia un partido político, en el muestreo repetido obtendremos una variedad de distribuciones de casilla. Podría suceder que una primera muestra recogiera ligeramente menos demócratas blancos que lo esperado; pero la siguiente muestra podría recoger un poco más. Tales fluctuaciones de una muestra a la siguiente resultarían del error de muestreo normal esperado. Nuestra prueba de hipótesis de la relación entre la raza y la preferencia hacia un partido político depende de la muestra única que extrajimos. La prueba chi cuadrada responde la pregunta: ¿En el muestreo repetido, qué tan raro es observar brechas entre las frecuencias observadas y las esperadas, cuando la raza no tiene nada que ver con la preferencia hacia un partido político? En otras palabras, ¿ los efectos de raza en la preferencia hacia un partido político son significativos? Una distribución aleatoria de frecuencias de casillas —en proporción con los totales marginales— es lo que ocurre en el muestreo cuando no existe una relación entre las dos variables. La hipótesis alternativa tiene probabilidad de ser aceptada cuando los efectos de la prueba sean grandes (esto es, cuando haya diferencias grandes entre las frecuencias observadas y las esperadas).

El estadístico chi cuadrada y la tabla de la chi cuadrada (tabla estadística G en el apéndice B) permiten calcular la probabilidad exacta (valor p) de las diferencias entre las frecuencias de casilla observadas y esperadas, cuando la hipótesis estadística de "no relación" es verdadera. Al comparar esta probabilidad con el nivel alfa, se rechaza la hipótesis estadística o no se rechaza. Si ocurre lo último, se concluye que no hay razón para creer que la raza y la preferencia hacia un partido político están relacionadas: que las diferencias entre las frecuencias de casilla observadas y las esperadas resultan del error de muestreo. No obstante, si se rechaza la hipótesis estadística, se concluye que existe una relación entre la raza y la preferencia hacia un partido político. También se describiría la naturaleza de esta relación, señalando los efectos fuertes —casillas donde existen discrepancias grandes entre las frecuencias observadas y esperadas. Por ejemplo, se señalaría que un porcentaje desproporcionadamente bajo de blancos se identifica como demócratas, en contraste con un porcentaje desproporcionadamente alto de afroamericanos.

Grados de libertad para la prueba chi cuadrada

Para leer la tabla de la distribución de la chi cuadrada (tabla estadística G en el Apéndice B) se requiere calcular el estadístico de la prueba chi cuadrada y los grados de libertad apropiados. Para la prueba chi cuadrada, los grados de libertad se determinan por el número de columnas y filas en la tabulación cruzada.

Cálculo de los grados de libertad para la prueba chi cuadrada

$$gl = (f-1)(c-1)$$

donde

gl = grados de libertad para la prueba chi cuadrada
f = número de filas en la tabulación cruzada
c = número de columnas en la tabulación cruzada

Para una tabulación cruzada de 2×3 como la tabla 13-1 de raza y preferencia de partido,

$$gl = (f-1)\,(c-1) = (3-1)\,(2-1) = 2$$

Recuerde que los grados de libertad representan el número de oportunidades en el muestreo para compensar las limitaciones en un estadístico o en una prueba estadística. Por ejemplo, en el capítulo 10 se anotó que con pruebas de medias, las puntuaciones extremas tienden a alejar a la media de una muestra del parámetro verdadero. Para la prueba chi cuadrada, como sugiere su fórmula para gl, el número de casillas en una tabulación cruzada influye en el tamaño del estadístico calculado. Una tabulación cruzada puede distorsionarse si, sólo por casualidad en este ejemplo particular, una casilla tiene frecuencias de más o de menos comparada con su ocurrencia verdadera en la población. Por ejemplo, suponga que en la población hay muchos demócratas blancos; pero esta muestra simplemente no los captó. Así como una puntuación extrema "distorsiona" una media, una o más casillas sobrecargadas o poco cargadas debido al azar en una tabulación cruzada puede distorsionar el cálculo del estadístico de la prueba chi cuadrada. El cálculo de los grados de libertad compensa esta tendencia. El examen cercano de la fórmula de gl para el estadístico chi cuadrada revela que cuanto más categorías tengan las dos variables de la tabulación cruzada, mayores serán los grados de libertad. A la inversa, las tablas con pocas casillas, como las tablas de 2×2 y de 2×3, tienen pocos grados de libertad. Con estas tablas pequeñas, si por casualidad la muestra incluye una casilla sobrecargada o poco cargada, hay pocas oportunidades (es decir, otras casillas) para equilibrar este desafortunado evento muestral. El muestreo repetido nos indica que con el paso del tiempo, cuando se extrae un gran número de muestras, a veces muestreamos en exceso una casilla y otras veces lo hacemos en cantidad insuficiente. Con sólo cuatro casillas, el muestreo excesivo de una sola casilla puede distorsionar los resultados. De hecho, si conocemos la frecuencia esperada de una casilla en una tabulación cruzada de 2×2, es posible usar los totales marginales para calcular las otras tres. En otras palabras, sólo una casilla tiene libertad para variar independientemente de la manera en que se calcula el estadístico; así, hay sólo 1 grado de libertad.

Requisito de la frecuencia mínima por casilla. Con la chi cuadrada, no obstante, un aumento en los grados de libertad no siempre resulta una ventaja. Este estadístico de prueba tiene una limitación que restringe el número de categorías a emplear. La frecuencia esperada en cada casilla de una tabulación cruzada debe ser por lo menos de cinco, o de lo contrario, se deben realizar ajustes en el cálculo del estadístico chi cuadrada. Las casillas con frecuencias esperadas pequeñas introducen error de muestreo adicional que puede llevar a una decisión de rechazo incorrecta y a una conclusión errónea. Cuando los tamaños de la casilla resultan pequeños, les llamamos reducción de la casilla. La experiencia práctica del autor sugiere que para evitar la reducción de una casilla, el tamaño de la muestra global debe ser igual al número de casillas multiplicado por 12. Así, para una simple tabla de 2×2, se necesitan aproximadamente 48 casos; para una tabla de 2×3, 72 casos, etcétera. Incluso con un tamaño grande de la muestra global, no obstante, la reducción de la casilla puede constituir un problema para algunas variables. Por ejemplo, con la variable preferencia religiosa podría ser que tuviéramos una muestra de 100 sujetos pero sólo seis de ellos son musulmanes. Si intentamos descomponer esta variable por género, por decir, no existe ninguna posibilidad de que las frecuencias conjuntas de hombre-musulmán y mujer-musulmán tengan ambas el mínimo requerido de cinco casos.

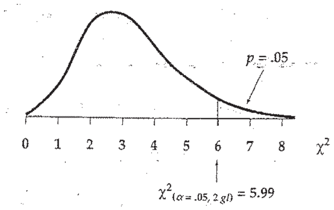
Cuando existe insuficiencia de casos en una casilla, pueden efectuarse diversas correcciones. Primero, se puede reducir el número de casillas eliminando las categorías poco densas. Por ejemplo, para la preferencia religiosa, la categoría musulmán podría ser eliminada o incluida en una categoría con la denominación "otra" con otras religiones con bajas frecuencias, como la hindú. Esto, por supuesto, requiere que los resultados sean reportados con tales modificaciones. Una segunda alternativa para remediar la reducción de una casilla consiste en absorber la categoría de baja frecuencia en otra categoría que tenga un significado teórico. Por ejemplo, para la variable raza, la categoría "otra" podría combinarse con afroamericano para crear una nueva categoría llamada "no blanco". Esto es apropiado si la variable raza es en esencia representativo (o un sustituto adecuado) para el estatus mayoría-minoría. Una tercera alternativa consiste en efectuar una corrección en el cálculo de la chi cuadrada, restando 0.5 al calcular cada una de las diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas. Esto se denomina la corrección de Yates por continuidad; realiza un ajuste por la inconsistencia en los tamaños de las casillas. Una cuarta alternativa consiste en usar otra prueba estadística llamada la prueba exacta de Fisher (Blalock, 1979: 292), que resulta útil en situaciones donde se presentan muchas frecuencias de casilla menores que cinco, pero ninguna puede eliminarse o combinarse justificadamente.

La corrección de Yates y la prueba exacta de Fisher vuelven complejos los cálculos, al punto donde el tiempo empleado en aprenderlos sería más útil para aprender cómo calcular los estadísticos de una tabulación cruzada en la computadora. Los programas de cómputo para tabulaciones cruzadas por lo común ofrecen un conteo de las casillas con frecuencias pequeñas y presentan una chi cuadrada con la corrección de Yates y la prueba exacta de Fisher, junto con el estadístico chi cuadrada, para que puedan sustituirse cuando sea apropiado. Una comparación de estos estadísticos en los resultados de la computadora revelarán que cuando el tamaño de la muestra es bastante grande, unas cuantas casillas con baja frecuencia tienen escaso impacto en el estadístico chi cuadrada resultante. En otras palabras, con las muestras grandes el valor corregido de la chi cuadrada será aproximadamente el mismo que el valor no corregido, y ambos estadísticos tendrán los mismos valores *p*.

La distribución muestral de la chi cuadrada y sus regiones críticas

La fórmula de la chi cuadrada fue derivada a principios del siglo XX por un estadista llamado Karl Pearson, quien también es conocido por desarrollar los estadísticos de los capítulos 14 y 15. Es probable que haya deducido esta fórmula matemáticamente; pero imaginemos cómo pudo haber determinado la fórmula de forma empírica —a través del muestreo repetido como fue hecho por los cuenta arroces de antes—. Él toma una caja llena de cantidades iguales de frijoles surtidos —una población de frijoles—. Considera a los frijoles blancos como demócratas blancos, a los frijoles rojos como afroamericanos demócratas, a los frijoles pintos como blancos independientes, y así sucesivamente. Además extrae una muestra aleatoria de 400 frijoles, los clasifica y cuenta los de cada tipo para obtener las frecuencias observadas de la tabulación cruzada. Después de calcular las frecuencias esperadas para cada casilla, resta las frecuencias observadas y las esperadas, eleva al cuadrado los resultados y los divide entre la frecuencia esperada. Entonces suma estos cocientes para obtener el estadístico de la χ^2. Él repite esto, por decir, 10 000 veces y representa los cálculos resultantes como una curva de probabilidad —un histograma suavizado—. La forma de esta distribución de probabilidades se presenta en la figura 13-1. Observe que es de una cola. Éste siempre será el caso, porque al elevar al cuadrado las diferencias, se elimina cualquier signo negativo. La prueba, sin embargo, es no direccional, como lo analizaremos más adelante.

FIGURA 13-1
La forma de la curva de distribución de probabilidad de la chi cuadrada con la región crítica para $\alpha = .05$ y 2 grados de libertad



Como se expuso antes, la forma particular de la distribución de la chi cuadrada para un problema dado depende del número de grados de libertad que es determinado por el número de casillas en la tabulación cruzada. La figura 13-1 presenta el valor crítico de la chi cuadrada para un nivel de significancia de .05 con 2 grados de libertad. Este valor crítico significa que si no existe relación entre las dos variables, con el muestreo repetido el estadístico chi cuadrada resultará tan alto o mayor que 5.99 sólo 5 por ciento de las veces. El otro 95 por ciento de las veces la chi cuadrada resultará menor que 5.99, con la mayoría de los resultados cayendo ligeramente arriba de cero; esto es justo lo que se espera cuando las frecuencias observadas y las esperadas son con cierto error de muestreo.

La prueba chi cuadrada se emplea en las siguientes circunstancias:

Cuándo utilizar la prueba chi cuadrada de la relación entre dos variables nominales

En general: Al comprobar una hipótesis de la relación entre dos variables nominales.

1. Hay una población con una muestra representativa de ella.
2. Se tienen dos variables, ambas con un nivel de medición nominal/ordinal.
3. La frecuencia esperada de cada casilla en la tabulación cruzada por lo menos es de cinco.

Los seis pasos de la inferencia estadística para la prueba chi cuadrada

Utilicemos los datos en la tabla 13-1 y su tabla desglosada (tabla 13-2) para contestar la pregunta de investigación de si existe una relación entre la raza y la preferencia hacia un partido político. La hipótesis estadística es que no existe una relación. Puesto que ambas variables son nominales y todas las frecuencias esperadas están arriba de cinco, es posible usar la prueba chi cuadrada.

Breve lista de verificación para los seis pasos de la inferencia estadística

Preparación de la prueba

Formule la pregunta de investigación; liste las especificaciones, incluso las variables (por ejemplo, $X = ...$, $Y = ...$), sus niveles de medición, la(s) población(es) bajo estudio, y la(s) muestra(s) y el(los) tamaño(s) de la(s) muestra(s); seleccione la prueba estadística; proporcione observaciones de estadísticos y parámetros; y trace un diagrama conceptual.

Seis pasos

Usando del símbolo H para *hipótesis*:

1. Enuncie la H estadística y la H alternativa, y estipule la dirección de la prueba.
2. Describa la distribución muestral.
3. Determine el nivel de significancia (α) y especifique el valor crítico de la prueba.
4. Observe los resultados en cuestión de la muestra y calcule los efectos de la prueba, el estadístico de la prueba y el valor p.
5. Tome la decisión de rechazo.
6. Interprete y aplique las mejores estimaciones en términos cotidianos.

Preparación de la prueba

Pregunta de investigación: ¿Ciertas razas están más a favor de ciertos partidos políticos? Es decir, ¿existe una relación entre la raza y la preferencia hacia un partido político? *Especificaciones:* Variables: X = raza, nivel nominal; Y = preferencia hacia un partido político, nivel nominal. *Población*: La población de adultos estadunidenses. *Muestra:* $n = 400$ adultos. *Procedimiento estadístico*: La prueba chi cuadrada de la relación entre dos variables nominales. *Observación:* Frecuencias observadas y frecuencias esperadas calculadas ($E_{casilla}$), donde:

$$E_{casilla} = \frac{(\text{total marginal por columna para la casilla})(\text{total marginal por fila para la casilla})}{\text{gran total}}$$

Partido político (Y) / *Raza (X)* →	*Blanco*	*Afroamericano*	*Totales por fila*
Demócrata	96 (112.5)	54 (37.5)	150
Republicano	123 (112.5)	27 (37.5)	150
Independiente/otro/ninguno	81 (75.0)	19 (25.0)	100
Totales por columna	300 (300)	100 (100)	400

Seis pasos

1. *H. est.*: $\chi^2 = 0$

   Es decir, no existe relación entre raza y preferencia hacia un partido político.

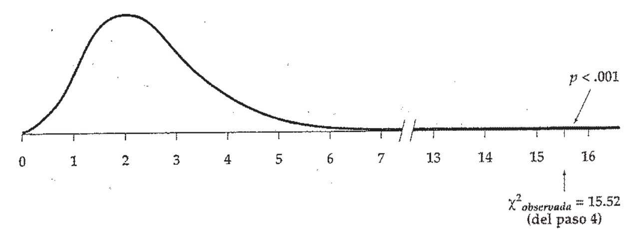
   H. alt.: $\chi^2 > 0$

   Es decir, existe una relación entre raza y preferencia hacia un partido político. Prueba de una cola pero no direccional.
2. *Distribución muestral:*

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

$$gl = (f-1)(c-1) = (3-1)(2-1) = 2$$

   Si la *H. est.* es verdadera y se extraen repetidamente muestras de tamaño 400 de la población y se colocan en una tabulación cruzada para raza y preferencia política, los cálculos del estadístico chi cuadrada producirán la siguiente distribución chi cuadrada:



3. *Nivel de significancia*: $\alpha = .05$ (no direccional). De una cola $gl = 2$. Valor crítico de la prueba $= \chi^2_\alpha = 5.99$ (de la tabla estadística G en el apéndice B).
4. *Observaciones:*

   Efectos de la prueba y estadísticos de la prueba:

Casilla (X, Y)	*O*	*E*	*(O − E)*	*(O − E)²*	*[(O − E)²/E]*
Blanco demócrata	96	112.5	−16.5	272.25	2.42
Afroamericano demócrata	54	37.5	16.5	272.25	7.26
Blanco republicano	123	112.5	10.5	110.25	.98
Afroamericano republicano	27	37.5	−10.5	110.25	2.94
Blanco independiente	81	75.0	6.0	36.0	.48
Afroamericano independiente	19	25.0	−6.0	36.0	1.44
Totales	400	400.0	0.0		$\chi^2 = 15.52$

Valor p: p [de extraer una muestra con diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas tan inusuales o más inusuales que aquellas observadas cuando, de hecho, no existe relación entre las variables] < .001 (el área señalada en la curva en el paso 2).

5. *Decisión de rechazo:* $|\chi^2_{observada}| > |\chi^2_{\alpha}|$ (es decir, 15.52 > 5.99); $p < \alpha$; .001 < .05. Rechace la *H.* est. y acepte la *H.* alt. al nivel de confianza del 95 por ciento.
6. *Interpretación:* Aspectos de la relación y mejores estimaciones. *Existencia:* Existe una relación entre raza y preferencia hacia un partido político; $\chi^2 = 15.52$, $p <$ .001.

Naturaleza: Un número desproporcionadamente alto de afroamericanos prefieren el partido demócrata. *Mejores estimaciones:* Cincuenta y cuatro por ciento de los afroamericanos son demócratas comparados con 32 por ciento de los blancos. Sólo 27 por ciento de los afroamericanos son republicanos comparados con 41 por ciento de blancos.

Aspectos relevantes de una relación para la prueba chi cuadrada

Note que en el último paso de la prueba de hipótesis se deducen sin dificultad sólo dos de los cuatro aspectos de una relación: existencia y naturaleza. Se establece la existencia de una relación con la fórmula de la prueba chi cuadrada, comprobando la hipótesis de no relación entre las dos variables nominales. Si se encuentra una relación, se describe su naturaleza reportando los "efectos" (es decir, las diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas) de las casillas que destacan en la tabulación cruzada. En términos cotidianos se informan las mejores estimaciones mediante el cálculo de los porcentajes por columna para las casillas seleccionadas. Recuerde del capítulo 2 que un porcentaje por columna *es la frecuencia de una casilla representada como un porcentaje con respecto al total marginal de la columna:*

$$\%\text{ por columna [de frecuencia conjunta]} = \frac{\#\text{ en una casilla}}{\#\text{ total en la columna}} \times 100$$

Para calcular el porcentaje de afroamericanos que son demócratas:

$$\begin{aligned}\%\text{ [de afroamericanos que son demócratas]} &= \frac{\#\text{ de afroamericanos demócratas}}{\#\text{ total de afroamericanos}} \times 100 \\ &= \frac{54}{100} \times 100 = 54\%\end{aligned}$$

Se realizan cálculos similares de los porcentajes por columna para blanco-demócrata, afroamericano-republicano y blanco-republicano. Se reportan los porcentajes por columna que sugieren aspectos relevantes, en este caso que uno de los partidos políticos es desproporcionadamente afroamericano y el otro es desproporcionadamente blanco.

Para variables nominales la dirección de una prueba carece de significado. Por ejemplo, con la variable género, no tiene sentido decir que los hombres son más "positivos" o "negativos"; uno es hombre o mujer. (La chi cuadrada puede usarse con variables ordinales y en esa situación la dirección a veces tiene sentido.)

Existen medidas de la fuerza de una relación para el estadístico de la prueba chi cuadrada; sin embargo, rara vez se reportan, porque tales reportes están cargados con error potencial. Cada medida requiere un empleo muy cuidadoso y se aplica sólo en circunstancias muy específicas (véase Lee y Maykovich 1995: 129).

Aspectos de una relación al emplear el estadístico chi cuadrada

Existencia: Pruebe la hipótesis estadística de que $\chi^2 = 0$; esto es, no existe relación entre *X* y *Y*.
Use el estadístico de la prueba chi cuadrada:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

$$gl = (f-1)(c-1)$$

Dirección: No aplicable.
Fuerza: Normalmente no reportada.
Naturaleza: Reporte los porcentajes por columna para las casillas seleccionadas que transmiten con claridad la sustancia de los hallazgos.

Uso de la chi cuadrada como una prueba de diferencia de proporciones

Como se estudió en el capítulo 2, cuando se presentan las frecuencias conjuntas de dos variables nominales en una tabulación cruzada, resulta muy fácil calcular sus porcentajes. Por ejemplo, suponga que tenemos los datos de la tabla 13-3, que corresponden a un estudio acerca de pacientes ancianos que asisten por primera vez al médico en una clínica. Cada paciente es acompañado por un cuidador, por lo común un miembro de la familia, en particular la esposa o una hija. Algunos de los pacientes y sus cuidadores asisten a una clínica común de atención primaria que proporciona servicios a personas de todas las edades. Los otros asisten a una clínica geriátrica especializada en tratar a pacientes ancianos. Debido a que los cuidadores a menudo sufren estrés, la clínica geriátrica exige incluirlos en el proceso de tratamiento y proporcionarles apoyo, como referirlos a grupos de apoyo para cuidadores.

TABLA 13-3 Tipo de clínica por referencia del cuidador a un grupo de apoyo (Frecuencias esperadas de las casillas en paréntesis)

Referido a grupo de apoyo	*Tipo de clínica →* *De atención primaria*	*Geriátrica*	*Totales por fila*
Sí	7 (15.83)	23 (14.17)	30
No	50 (41.17)	28 (36.83)	78
Totales por columna	57 (57.00)	51 (51.00)	108

Para evaluar esta demanda, entrevistamos a muestras aleatorias de cuidadores en ambas clínicas. Los datos en la tabla 13-3 comparan el número de cuidadores en cada clínica que son referidos a grupos de apoyo. Una variable nominal, entonces, es el tipo de clínica, y la otra es la referencia a grupos de apoyo. Podemos investigar la pregunta de investigación de que existe una relación entre el tipo de clínica y la probabilidad de la referencia a un grupo de apoyo. Si los pacientes de la clínica geriátrica son referidos en una tasa significativamente mayor, las demandas de esa clínica están justificadas.

En la tabla 13-3 enfoquemos nuestra atención en el porcentaje de cuidadores de la clínica geriátrica referidos a grupos de apoyo calculando el porcentaje de la columna:

$$\text{\% [de cuidadores de clínica geriátrica referidos a un grupo de apoyo]} = \frac{\text{\# en la casilla geriátrica-sí}}{\text{\# total en clínica geriátrica}} \times 100$$

$$= \frac{23}{51}(100) = 45.10\%$$

De igual forma, el porcentaje de la columna de cuidadores de clínica de atención primaria enviados a grupos de apoyo es 12.28 por ciento [es decir, 7/57)(100)]. Aparentemente existe una gran diferencia en estos dos porcentajes, no obstante, debemos recordar que éstos son datos muestrales. Cualquier diferencia entre los dos porcentajes quizá se deba al error de muestreo, por lo que debemos probar una hipótesis para determinar si estos porcentajes son significativamente diferentes para las poblaciones de cuidadores de las dos clínicas. Conceptualmente, dicho problema de investigación puede ser concebido como se muestra en la figura 13-2. Aunque multiplicamos las fracciones por 100 para obtener los porcentajes por columna, por consistencia llamamos a esto una prueba de proporciones y usamos el símbolo P_u en la figura 13-2. Procedamos a realizar los seis pasos de la inferencia estadística y la prueba chi cuadrada para responder la pregunta de investigación.

Breve lista de verificación para los seis pasos de la inferencia estadística

Preparación de la prueba

Formule la pregunta de investigación; liste las especificaciones, incluso las variables (ejemplo, X =..., Y =...), sus niveles de medición, la(s) población(es) bajo estudio, y la(s) muestra(s) y el(los) tamaño(s) de la(s) muestra(s); seleccione la prueba estadística; proporcione observaciones de estadísticos y parámetros; y trace un diagrama conceptual.

Seis pasos

Usando del símbolo H para *hipótesis*:

1. Formule la H estadística y la H alternativa, y estipule la dirección de la prueba.
2. Describa la distribución muestral.
3. Determine el nivel de significancia (α) y especifique el valor crítico de la prueba.
4. Observe los resultados de la muestra en cuestión y calcule los efectos de la prueba, el estadístico de la prueba y el valor p.
5. Tome la decisión de rechazo.
6. Interprete y aplique las mejores estimaciones en términos cotidianos.

Preparación de la prueba

Pregunta de investigación: ¿Existe una diferencia significativa en los porcentajes de cuidadores referidos a grupos de apoyo de acuerdo al tipo de clínica? Puesto de otra manera, ¿existe una relación entre el tipo de clínica y la probabilidad de la referencia a un grupo de apoyo? *Especificaciones:* Variables: X = tipo de clínica, nivel nominal; Y = referencia a grupos de apoyo, nivel nominal. *Población:* Cuidadores clínicas de atención primaria y de cuidado geriátrico. *Muestra:* n = 108 cuidadores (57 de la clínica de atención primaria y 51 de la clínica geriátrica). *Procedimiento*

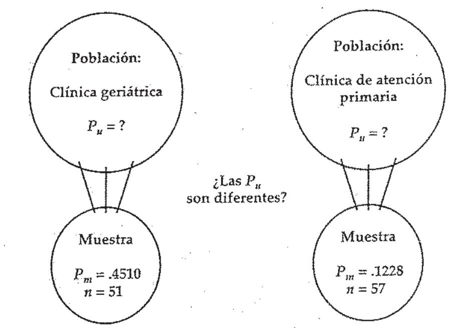


FIGURA 13-2 *Comprobación de la diferencia de proporciones o porcentajes entre grupos*

estadístico: La prueba chi cuadrada de la relación entre dos variables nominales. La pregunta de investigación se presenta de manera gráfica en la figura 13-2.
Observación:

Frecuencias observadas, las frecuencias esperadas calculadas ($E_{casilla}$ en el paréntesis) y los porcentajes por columna (% columna) donde

$$E_{casilla} = \frac{\text{(total marginal por columna para la casilla)}\ \text{(total marginal por fila para la casilla)}}{\text{gran total}}$$

y

$$\text{\% columna [de frecuencia conjunta]} = \frac{\text{\# en una casilla}}{\text{\# total en la columna}} \times 100$$

Referido a grupo de apoyo	*Tipo de clínica →*	*Atención primaria*	*Geriátrico*	*Totales por fila*
Sí		7 (15.83) Columna % 12.28	23 (14.17) Columna % 45.10	30
No		50 (41.17) Columna % 87.72	28 (36.83) Columna % 54.90	78
Totales por columna		57 (57.00)	51 (51.00)	108

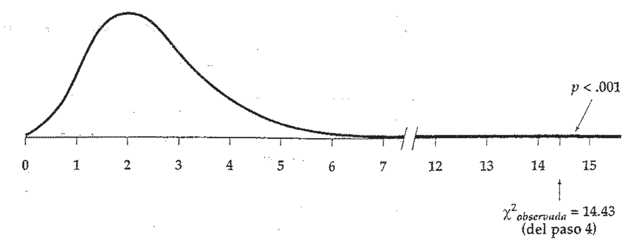
Seis pasos

1. *H. est.:* $\chi^2 = 0$
   Esto es, no existe una relación entre el tipo de clínica y el porcentaje de referencia a un grupo de apoyo.
   H. alt.: $\chi^2 > 0$
   Es decir, existe una relación entre el tipo de clínica y el porcentaje de referencia a un grupo de apoyo. De una cola pero no direccional.
2. *Distribución muestral:*

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

$$gl = (f-1)(c-1) = (2-1)(2-1) = 1$$

Si la *H. est.* es verdadera y repetidamente se extraen muestras de cuidadores de tamaño 57 y 51 de las poblaciones de las clínicas y se acomodan en la tabulación cruzada de acuerdo al tipo de clínica y al porcentaje de referencia a un grupo de apoyo, los cálculos del estadístico chi cuadrada producirán la siguiente distribución de la chi cuadrada:



3. *Nivel de significancia:* $\alpha = .05$ (no direccional); de una cola; $gl = 1$. Valor crítico de la prueba $= \chi^2_\alpha = 3.84$ (de la tabla estadística G en el apéndice B).
4. *Observaciones:*

   Efectos de la prueba y estadístico de la prueba:

Casilla (X, Y)	*O*	*E*	*(O − E)*	*(O − E)²*	*[(O − E)²/E]*
Clínica de atención primaria – no referencia	50	41.17	8.83	77.97	1.89
Clínica de atención primaria – con referencia	7	15.83	−8.83	77.97	4.92
Clínica geriátrica – no referencia	28	36.83	−8.83	77.97	2.12
Clínica geriátrica – con referencia	23	14.17	8.83	77.97	5.50
Totales	108	108	0.00		$\chi^2 = 14.43$

   Valor *p*: *p* [de extraer una muestra con diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas tan inusuales o más inusuales que aquellas observadas cuando, de hecho, no existe una relación entre las variables] < .001 (el área señalada en la curva del paso 2).
5. *Decisión de rechazo:* $|\chi^2_{observada}| > |\chi^2_\alpha|$ (es decir, 14.43 > 3.84); $p < \alpha$; .001 < .05. Rechace la *H.* est. y acepte la *H.* alt. al nivel de confianza del 95 por ciento.
6. *Interpretación:* Aspectos de la relación y mejores estimaciones.
   Existencia: Existe una relación entre el tipo de clínica y el porcentaje de referencia a un grupo de apoyo; $\chi^2 = 14.43$, $p < .001$.
   Naturaleza: Los cuidadores en las clínicas geriátricas tienen mayor probabilidad de ser referidos a grupos de apoyo. *Mejores estimaciones:* 45.10 por ciento de los cuidadores que acompañan a pacientes a la clínica geriátrica son referidos a grupos de apoyo, comparados con sólo 12.28 por ciento de los cuidadores que acompañan a pacientes a la clínica de atención primaria.
   Respuesta: Los cuidadores que ayudan a pacientes en la clínica geriátrica tienen mayor probabilidad de ser referidos a un grupo de apoyo. Las demandas de la clínica están justificadas.