CAPÍTULO

5

MEDICIÓN DE LA DISPERSIÓN O VARIACIÓN EN UNA DISTRIBUCIÓN DE PUNTUACIONES

51

Introducción

Reportar un estadístico de tendencia central por sí mismo no es suficiente para comunicar la forma de una distribución de puntuaciones. Dos muestras con las mismas medias pueden tener formas sumamente diferentes. La figura 5-1 presenta dos distribuciones de edades: para una muestra de alumnos de escuela primaria (desde jardín de niños hasta sexto grado, o K-6) y para una clase de tercer grado de una segunda escuela. La edad media de los alumnos en ambas escuelas es de 8.5 años. En la escuela K-6, sin embargo, los niños tienen entre 5 y 12 años. En la clase de tercer grado de la otra escuela ninguno de los alumnos es menor de 7 o mayor de 10 años de edad. Aunque estas dos distribuciones de edades tienen la misma tendencia central, sus puntuaciones se dispersan de manera muy diferente, con una mayor dispersión de edades en la escuela K-6.

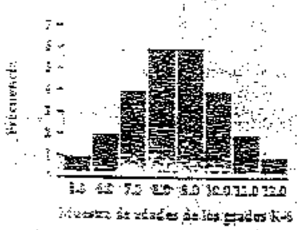


FIGURA 5-1
Comparación de la dispersión de edades de alumnos en dos muestras con las mismas medias

El tema de este capítulo es la dispersión, es decir, *cómo se extienden las puntuaciones de una variable de intervalo/razón de la menor a la mayor y la forma de la distribución entre éstas.* (Como una ayuda para la memoria, recuerde que Johnny Appleseed dispersó semillas de manzana.) Existe un número infinito de posibles formas de distribución para una variable con una media dada. Todas las puntuaciones podrían agruparse alrededor de la media con la clara forma de una curva de campana; pero la curva podría ser de diferentes tamaños, dependiendo del tamaño de la muestra. O las puntuaciones podrían estar ligera o grandemente sesgadas hacia un lado. Además, de esto una sola variable puede tener diferentes dispersiones de una población a otra. Por ejemplo, el ingreso familiar anual para residentes en Estados Unidos varía desde cero hasta decenas de millones de dólares; mientras el ingreso familiar de los pobres que viven en proyectos de asistencia social varía desde cero hasta unos cuantos miles de dólares.

> **Dispersión**
> Cómo se extienden las puntuaciones de una variable de intervalo/razón de la menor a la mayor y la forma de la distribución entre éstas.

Los **estadísticos de dispersión** *describen cómo se extienden las puntuaciones de una variable de intervalo/razón a través de su distribución.* Los estadísticos de dispersión permiten descripciones precisas de la frecuencia de casos en cualquier punto de una distribución. Por ejemplo, si el gobierno federal decide aumentar los impuestos para los "ricos", empleando estadísticos de dispersión podemos identificar el nivel de ingresos del 5 por ciento más rico de todas las familias del país. De manera similar, si un programa de asistencia social se planea para cubrir sólo 10 000 familias de la ciudad, podemos establecer qué nivel de ingreso familiar califica para recibir la asistencia. Estudiar la dispersión es como pasear hacia atrás y hacia adelante a lo largo del eje X de un histograma, y observar dónde se concentran los casos. ¿La mayoría de los casos cae alrededor de la media o están cargados hacia algún lado? ¿Cuántos casos caen entre cualesquiera dos puntos? ¿Qué valor de la variable corta el 10 por ciento superior de casos? Los dos estadísticos de dispersión más usados se analizan más adelante: el rango y la desviación estándar.

> **Estadísticos de dispersión**
> Estadísticos que describen cómo se extienden las puntuaciones de una variable de intervalo/razón a través de su distribución.

El rango

El rango *es una expresión de cómo las puntuaciones de una variable de intervalo/razón se distribuyen de la menor a la mayor* —la distancia entre las puntuaciones mínima y máxima en una muestra—. Se calcula como la diferencia entre las puntuaciones máxima y mínima, más el valor de la unidad de redondeo. El valor de la unidad de redondeo (por ejemplo, 1 si las puntuaciones se redondean al número entero más cercano, 0.1 si las puntuaciones se redondean a la décima más cercana y así sucesivamente) se suma para considerar el límite real inferior de la puntuación más baja y el límite real superior de la puntuación más alta.

Cálculo del rango de una variable X de intervalo/razón

1. Ordene las puntuaciones en la distribución de menor a mayor.
2. Identifique las puntuaciones mínima y máxima.
3. Identifique el valor de la unidad de redondeo (véase el apéndice A como repaso).
4. Calcule el rango:

Rango = (puntuación máxima − puntuación mínima) + valor de la unidad de redondeo

El rango

Expresión de cómo las puntuaciones de una variable de intervalo/razón se distribuyen de menor a mayor.

Calculemos el rango para un problema de ejemplo. Suponga que X = edad (redondeado al año más cercano) y tenemos la siguiente distribución de puntuaciones:

21, 23, 43, 26, 20, 21, 25

Empiece por ordenar las puntuaciones:

20, 21, 21, 23, 25, 26, 43

Identifique las puntuaciones mínima y máxima de 20 y 43, respectivamente, e identifique que la unidad de redondeo es 1.

Calcule el rango:

Rango = (puntuación máxima − puntuación mínima) + valor de la unidad de redondeo

$= (43 - 20) + 1 = 24$ años

Como resultado del redondeo, el individuo que registró 20 podría tener 19.5 años, y el de 43 años, podría tener 43.5 años. El rango de 24 años es la distancia entre estos límites reales menor y mayor de las puntuaciones; es decir, 43.5 años − 19.5 años = 24 años.

A menudo resulta más informativo reportar las puntuaciones mínima y máxima por sí mismas, señalando que estas edades varían desde 20 hasta 43. De esta manera indirectamente mostramos que en la muestra no hay menores de 20 años ni mayores de 43 años de edad.

Limitaciones del rango: situaciones en las que reportarlo solo puede conducir a errores

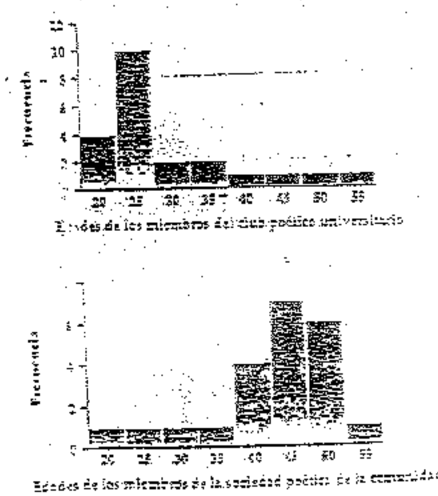
Puesto que el rango utiliza las puntuaciones más extremas de una distribución, un valor extremo inflará enormemente su cálculo. Esto sucedió para las siete edades indicadas arriba. Los 43 años hicieron que el rango pareciera estar extendido por encima de los 24 años. Reportar esto daría la impresión de que la muestra tiene un número considerable de sujetos de 30 y 40 años. Un reporte más exacto estipularía que con la excepción del estudiante de 43 años, las edades tenían un rango de 7 años (26 − 20 + 1 = 7). Omitir el valor extremo e indicar o como una excepción es una forma razonable de ajustar esta limitación del rango.

El rango también está limitado por su estrecho alcance informativo. No nos dice nada sobre la forma de la distribución entre las puntuaciones extremas. Por ejemplo, las dos distribuciones ilustradas en la figura 5-2 tienen el mismo rango, sugiriendo formas similares; pero, de hecho, sus formas son radicalmente diferentes. Por último, hay poco que uno pueda hacer matemáticamente con el rango. En suma, el rango tiene utilidad limitada, sobre todo cuando se informa solo.

La desviación estándar

La desviación estándar es otra medida sumaria de la dispersión o la variación de las puntuaciones en una distribución. Este estadístico de dispersión es muy útil-

FIGURA 5-2
Comparación de dos distribuciones con formas diferentes que tienen el mismo rango



55

rente del rango. Al enfocarse en los extremos de la distribución, el rango se aproxima a la dispersión desde los "exteriores" o extremos de la distribución. Observar el rango es como mirar un juego de básquetbol desde lo alto de las tribunas; la cancha parece encajonada por las canastas en cada extremo. En contraste, la desviación estándar *describe cómo las puntuaciones una variable de intervalo/razón u ordinal de tipo intervalo se extienden a lo largo de la distribución, en relación con la puntuación media.* La media es un estadístico de tendencia central y como tal proporciona un punto de enfoque que se centra "dentro" de la distribución. Observar la dispersión a partir de la media con su desviación estándar es como mirar desde el centro de la cancha; el centro de atención está en la distancia desde el centro de la cancha hasta otros puntos en cualquier dirección. Como la media, la desviación estándar es muy apropiada con variables de intervalo/razón y variables ordinales de tipo intervalo.

> **Desviación estándar**
>
> Describe cómo las puntuaciones de una variable de intervalo/razón u ordinal de tipo intervalo se extienden a lo largo de la distribución, en relación con la puntuación media.

Pensamiento proporcional y lineal sobre la desviación estándar

La desviación estándar se calcula determinando qué tan lejos está cada puntuación de la media —qué tan lejos se desvía de la media—. En este sentido, la desviación estándar es un derivado (o producto) de la media, y las dos medidas siempre se informan juntas. De hecho, la frase "la media y la desviación estándar" es una de las más empleadas por los estadísticos. La desviación estándar —como una medida sumaria de todas las puntuaciones en una distribución— nos dice con qué amplitud se agrupan las puntuaciones alrededor de la media. Como brevemente lo analizaremos, la desviación estándar también es útil en conjunción con la curva normal.

Antes de calcular una desviación estándar, analicemos su fórmula. La siguiente fórmula sirve para calcular directamente la desviación estándar:

> **Método directo para calcular la desviación estándar**
>
> $$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{n-1}}$$
>
> Donde:
>
> s_x = desviación estándar para la variable X de intervalo/razón u ordinal
>
> $\bar{X}$ = media de X
>
> n = tamaño de la muestra

F4

Vale la pena aproximarnos paso a paso al cálculo de la desviación estándar. Esto elimina el misterio de la fórmula (con su Σ, cuadrada, y símbolos de raíz cuadrada) y nos ayuda a apreciar que la desviación estándar es parte esencial de la curva normal.

Identifique las especificaciones. Empezamos identificando la información dada.

Especificación: X = una variable de intervalo/razón (u ordinal de tipo intervalo), n = tamaño de la muestra, y la distribución de puntuaciones en bruto para X.

Calcule la media. Calculamos la media porque la desviación estándar está diseñada para medir la dispersión alrededor la media.

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n}$$

Calcule las puntuaciones de la desviación: pensamiento lineal. Luego determinamos qué tan lejos de la media cae la puntuación de cada sujeto. La diferencia entre una puntuación y su media se llama puntuación de desviación, es decir, *cuánto difiere o se "desvía" de la media una puntuación individual:*

$$X - \bar{X} = \text{puntuación de desviación para un valor de } X$$

Piense en una puntuación de desviación como una medida de distancia en el eje X. ¿Qué nos dice la puntuación de desviación? Suponga que X es la variable peso, y el peso medio para una muestra de jugadores de voleibol de la Universidad de Elmstown es de 138 libras. La jugadora estrella, Sandra "Clavadora de alma" Carson, pesa 173 libras: ése es su puntuación en bruto o "puntuación X". Su puntuación de desviación es más 35 libras:

$$\text{Puntuación de desviación} = X - \bar{X} = 173 - 138 = 35 \text{ libras}$$

La puntuación de desviación nos dice dos cuestiones sobre una puntuación en la distribución: 1) la magnitud de la distancia desde la puntuación X hacia la media, y 2) la dirección de la puntuación X; ya sea que esté abajo o arriba de la media. Cuando una puntuación X es mayor que la media, la puntuación de desviación resultará un valor positivo, como el de Sandra, lo cual significa que la puntuación X queda a la derecha en una curva de distribución. Cuando una puntuación X es menor que la media, la puntuación de desviación resultará negativa, lo que significa que la puntuación X queda a la izquierda de la media. La puntuación de desviación de Sandra de +35 libras nos indica que ella está 35 libras *encima* del peso medio del equipo.

> **Puntuación de desviación**
>
> Cuánto difiere o "se desvía" de la media una puntuación individual.

La puntuación de desviación es el cálculo matemático central al determinar la desviación estándar. Como una medida sumaria para la muestra entera, la desviación estándar es una suma y promedio del cuadrado de estas puntuaciones de desviación, como en los siguientes pasos.

Sume las puntuaciones de desviación. El siguiente paso para calcular la desviación estándar consiste en sumar las puntuaciones de desviación. Tal suma siempre será igual a cero (dentro del error de redondeo):

$$\Sigma(X - \overline{X}) = 0 = \text{suma de las puntuaciones de desviación}$$

La suma de puntuaciones de desviación constituye una verificación respecto de la exactitud de los cálculos, porque la suma de puntuaciones de desviación *siempre* será igual a cero (con cierto error de redondeo). En el capítulo 4 estudiamos cómo la media es un punto de balance en la distribución. Lo que la media hace es balancear las desviaciones, para que se cancelen entre sí y resulten en una suma de puntuaciones de desviación igual a cero. De hecho, otra definición matemática de la media es *aquel punto en una distribución donde las puntuaciones de desviación suman cero.*

Eleve al cuadrado las puntuaciones de desviación y sume los cuadrados. La dispersión de una variable a menudo se compara para dos o más muestras. El hecho de sumar las puntuaciones de desviación no detectará una diferencia en la dispersión entre dos muestras, porque la suma para ambas será cero. Esto potencialmente nos deja en un callejón sin salida. Si las puntuaciones de una muestra se dispersan ampliamente y las de la otra lo hacen de manera estrecha, ¿qué beneficio implica informar que ambas tienen una suma de puntuaciones de desviación de cero? ¡Ninguno! Por consiguiente, al comparar dos muestras, debemos encontrar una manera de sumar las puntuaciones de desviación para que la suma sea más grande para una muestra con una dispersión mayor. La solución más útil consiste en elevar al cuadrado cada puntuación de desviación y después sumar los cuadrados. Al elevar al cuadrado se eliminan los signos negativos en las puntuaciones de desviación. La *suma de las puntuaciones de desviación al cuadrado* es la variación (a menudo se denomina suma de cuadrados), un estadístico que resume las desviaciones para la muestra entera:

$$\Sigma(X - \overline{X})^2 = \text{la variación (o "suma de cuadrados")}$$

> **La variación o la suma de cuadrados**
>
> Es la suma de las puntuaciones de desviación al cuadrado; un estadístico que resume las desviaciones para la muestra entera.

Divida la suma de cuadrados entre $n - 1$ para ajustar el tamaño y el error de la muestra: pensamiento proporcional. La suma de cuadrados, o variación, constituye una buena medida de la dispersión de una distribución; pero este estadístico presenta dos problemas. Primero, suponga que deseamos comparar las distribuciones de dos muestras de tamaños diferentes. Por ejemplo, podemos comparar las distribuciones de los promedios para muestras de estudiantes de la universidad local ($n = 88$) y de la universidad estatal ($n = 104$). Cuando sumamos los cuadrados para cada muestra, podría suceder que obtuviéramos una suma más alta para la universidad estatal, simplemente porque sumamos más números —104 casos en lugar de tan sólo 88—. Cada puntuación X suma [illegible] al cálculo. En otras palabras, todo lo demás es igual, cuanto más [illegible] mayor será la suma de cuadrados. Para realizar una comparación [illegible] muestras de tamaño diferente, entonces, necesitamos ajustar [illegible] en cada muestra dividiendo cada uno entre su tamaño muestral [illegible] la variación promedio (la media de la suma de cuadrados) en cada muestra. De esta forma ajustamos la suma de cuadrados en proporción al número de casos en la muestra.

Una segunda consideración respecto al tamaño de la muestra es que incluirá el error de muestreo; cuanto mayor sea la muestra, menor será el error de muestreo. Los estadísticos han determinado que si restamos 1 de n, este pequeño ajuste produce un estadístico de la muestra que estima con mayor precisión el parámetro de la población. Simplemente, restando 1 del tamaño de la muestra, realizamos un ajuste para el error de muestreo. (Considere que con muestras grandes, este ajuste tendrá poco efecto en el cálculo, mientras que con muestras pequeñas, tendría un gran efecto.)

En resumen, dividimos la variación (suma de cuadrados) entre $n - 1$ para considerar tanto los efectos del tamaño de la muestra en la suma como el error de muestreo. El resultado se llama varianza, y su símbolo es s_X^2:

$$s_X^2 = \frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n - 1} = \text{varianza de una muestra}$$

La varianza es *la variación promedio de las puntuaciones en una distribución.* Para evitar confundir varianza y variación, note el sonido acentuado en "varianza" y note que n está en su denominador. (Finalmente, debemos hacer notar que si la desviación estándar se calcula para las puntuaciones de una población entera, el error de muestreo no constituiría un problema. Por consiguiente, no necesitamos restar 1 de n para obtener la variación de una población, lo que se simbolizaría como σ_X^2.)

> **Varianza**
>
> Variación promedio de las puntuaciones en una distribución (es decir, la media de la suma de cuadrados).

Saque la raíz cuadrada de la varianza para obtener la desviación estándar. Para producir una buena medida de dispersión se requiere un último paso. La varianza es absolutamente aceptable para cálculos; pero no se interpreta de manera directa porque las unidades de medida están elevadas al cuadrado. Así, podríamos calcular la varianza de peso para el equipo de fútbol de la universidad local, y encontraríamos que es de 1 391.45 libras cuadradas. No obstante, ¿qué es una "libra cuadrada"? Es una libra de veces una libra; pero ¿quién sabe lo que realmente significa, excepto quizás un matemático? Necesitamos una unidad de medida directamente interpretable —libras en lugar de libras al cuadrado. Para "regresar" a libras, sacamos la raíz cuadrada de la varianza. (La raíz cuadrada de una unidad de medida al cuadrado es la unidad de medida en sí.) El resultado es la desviación estándar.

$$s_X = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1}} = \sqrt{s_X^2}$$

En el caso del peso del equipo local, la desviación estándar sería 37.30 libras:

$$s_X = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1}} = \sqrt{s_X^2}$$

$$= \sqrt{1\,391.45} = 37.30 \text{ libras}$$

Los pasos previamente esbozados involucran un cálculo directo de la desviación estándar. Los elementos de la ecuación —las puntuaciones de desviación, la suma de cuadrados o variación y la varianza— son importantes por sí mismos. Estos elementos aparecen por sí mismos en muchas fórmulas estadísticas (véase, por ejemplo, el capítulo 12). Los pasos para calcular directamente la desviación estándar se resumen en la tabla 5-1, que usted encontrará muy útil para los capítulos posteriores.

TABLA 5-1 Comprensión de la desviación mediante su cálculo directo

Pasos para calcular la desviación estándar	*Lo que el paso logra*
1. Identifique las especificaciones	1. X debe ser una variable de intervalo/razón (u ordinal de tipo intervalo).
2. Calcule la media: $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n}$	2. Puesto a que la desviación estándar está basada en desviaciones de la media.
3. Calcule las puntuaciones de desviación: $X - \overline{X}$	3. Para determinar la distancia de cada puntuación hacia la media.
4. Sume las puntuaciones de desviación: $\Sigma(X-\overline{X})$	4. Asegúrese de que: $\Sigma(X-\overline{X}) = 0$
5. Eleve al cuadrado las puntuaciones de desviación y súmelas para obtener la variación o suma de cuadrados: Variación $= \Sigma(X-\overline{X})^2$	5. Las puntuaciones de desviación se elevan al cuadrado para eliminar los signos negativos y obtener una suma diferente de cero.
6. Calcule la varianza: $s_X^2 = \frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1}$	6. Divida la suma de cuadrados entre $n-1$ para ajustarla para el tamaño de la muestra y el error de muestreo.
7. Calcule la desviación estándar, s_X: $s_X = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1}} = \sqrt{s_X^2}$	7. Saque la raíz cuadrada de la varianza para obtener unidades de medida directamente interpretables (unidades en lugar de unidades al cuadrado).

TABLA 5-2 Formato desglosado para calcular la desviación estándar usando los métodos directo y abreviado: peso de los jugadores de fútbol de la universidad local ($n = 12$)

Especificaciones		Cálculos		
(1) *Jugador*	(2) X	(3) $X - \overline{X}$	(4) $(X-\overline{X})^2$	(5) X^2
1	165	−73	5 329	27 225
2	200	−38	1 444	40 000
3	216	−22	484	46 656
4	217	−21	441	47 089
5	226	−12	144	51 076
6	236	−2	4	55 696
7	239	1	1	57 121
8	244	6	36	59 536
9	261	23	529	68 121
10	268	30	900	71 824
11	283	45	2 025	80 089
12	301	63	3 969	90 601
$n = 12$	$\Sigma X = 2\,856$ libras	$\Sigma(X-\overline{X}) = 0$	$\Sigma(X-\overline{X})^2 = 15\,306$ libras cuadradas	$\Sigma_X^2 = 695\,034$ libras cuadradas

Resulta una buena práctica preparar una tabla desglosada para estos cálculos. La tabla 5-2 presenta una tabla desglosada para determinar la desviación estándar de los pesos de 12 de los 98 jugadores en el equipo de fútbol local. (La columna 5 de la tabla se emplea con un método de cálculo abreviado que se describirá brevemente.)

Para calcular las puntuaciones de desviación, $X - \overline{X}$, calculamos la media y le restamos cada puntuación para obtener la tercera columna de la tabla desglosada:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{2\,856}{12} = 238 \text{ libras}$$

Finalmente, elevamos al cuadrado las puntuaciones de desviación en la columna 3 para obtener la columna 4. La suma en la columna 4 de la tabla 5-2 y el tamaño de la muestra n son todo lo que necesitamos para calcular la desviación estándar.

$$s_X = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{15\,306}{11}} = \sqrt{1\,391.45} = 37.30 \text{ libras}$$

Método abreviado para calcular la desviación estándar

Nuestro propósito para realizar el cálculo directo de la desviación estándar consiste en desarrollar un sentido de proporción acerca de cómo mide las desviaciones con respecto a la media. Sin embargo, si ésta fuera una tarea diaria, calcular directamente la desviación estándar resultaría embarazoso y propenso al error. Requiere calcular la media y, después, efectuar muchas restas también propensas al error, algo que es especialmente fastidioso con números decimales. Por fortuna, existe un método abreviado de cálculo al cual se llega sustituyendo $\Sigma X/n$ por la media de X y extendiendo la ecuación de la fórmula directa:

$$s_X = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma[X-(\Sigma X/n)]^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n-1}}$$

Método abreviado para calcular la desviación estándar

$$s_X = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n-1}}$$

donde

s_X = desviación estándar para la variable de intervalo/razón X

n = tamaño de la muestra

Esta fórmula abreviada no requiere calcular la media ni las puntuaciones de desviación. En la tabla 5-2, simplemente elevamos al cuadrado cada puntuación en bruto en la columna 2 para obtener la columna 5. Entonces las sumas de las columnas 2 y 5 se insertan en la fórmula abreviada:

$$s_X = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{695\,034 - \frac{(2\,856)^2}{12}}{11}} = 57.31 \text{ libras}$$

Una nota precautoria: Tenga cuidado en distinguir entre $(\Sigma X)^2$, la misma suma (de la columna 2) que sirve para calcular la media, y ΣX^2 de la columna 5. Con el propósito de aprender estadística, calcular la desviación estándar mediante ambos métodos resulta una buena manera de detectar los errores de cálculo. Si los dos resultados no son los mismos con un pequeño margen de error de redondeo, verifique todos sus cálculos una vez más.

Limitaciones de la desviación estándar

Ya que la desviación estándar se calcula a partir de la media, al igual que ésta, se infla por los valores extremos. Éstos generan puntuaciones con grandes desviaciones. Cuando se elevan al cuadrado, estas grandes desviaciones, ya sean positivas o negativas, producen una gran puntuación positiva inflada. Así, la desviación estándar puede ser muy confusa cuando se reporta para una distribución sesgada, en la que pocas puntuaciones se extienden en una dirección. Para convencerse del

efecto de las puntuaciones extremas tanto en la media como en la desviación estándar, complete la tabla desglosada de la tabla 5-2, pero agregue los dos casos siguientes para obtener una nueva muestra con $n = 14$: el jugador 13 que pesa 115 libras, y el jugador 14 que pesa 125 libras. A continuación compare las respuestas de las muestras original y nueva.

La desviación estándar como parte integral de la estadística inferencial

Las características de la media y de la desviación estándar las hacen muy útiles para alcanzar un sentido de proporción respecto de las variables individuales que se estudian. La desviación estándar y las puntuaciones de desviación, a partir de las cuales se calculan, también son esenciales para examinar las relaciones entre dos variables. El enfoque de la estadística inferencial consiste en desarrollar una comprensión de por qué las puntuaciones individuales de una variable dependiente se desvían de su media.

Suponga, por ejemplo, que estamos estudiando el abuso en el consumo de alcohol. Para una muestra de bebedores adultos, encontramos que la media del consumo de bebidas alcohólicas es de 4.3 galones por año. Gary consumió 7.3 galones el último año, 3 galones arriba de la media. Sam consumió sólo 1 galón, 3.3 galones abajo de la media. ¿Qué sucede con estas desviaciones alta y baja? Quizá podríamos hipotetizar acerca de algunas variables predictoras (independientes) que creamos que estén relacionadas con esta variable dependiente. Por ejemplo, la hipótesis del consumo a la hora de la comida podría explicar, en parte, la puntuación de desviación positiva de Gary: los bebedores de familias que consumen vino con sus alimentos tienen un consumo de alcohol medio más alto. Existe también la hipótesis del bebedor social, la cual podría explicar, en parte, la puntuación de desviación negativa de Sam: los bebedores que sólo consumen alcohol cuando se sirve en convivios sociales tiene un consumo de alcohol medio más bajo.

Para una muestra completa, nuestro interés radica en explicar la variación —la suma de puntuaciones de desviación al cuadrado—. Las puntuaciones de desviación, la variación y la desviación estándar simplemente son medidas de diferencias en las puntuaciones para una variable entre los sujetos de una población. ¿Es más alta la cantidad media de consumo de alcohol anual para las personas de ciertas regiones, entre diferentes edades o grupos religiosos o entre sexos? Las respuestas a tales preguntas dependen de las propiedades matemáticas de la media, la desviación estándar y la curva normal.

¿Por qué se llama desviación "estándar"?

La desviación estándar recibe su nombre del hecho de que proporciona una *unidad de medida común* (un estándar) para comparar variables con *unidades de medida observadas* muy diferentes. Por ejemplo, imagine que Mary Smith y Jason Jones aplican para una beca con base en su desempeño en las pruebas de admisión a la universidad. Mary contestó la prueba académica de la universidad (PAU) y obtuvo 26 puntos PAU. Jason hizo lo propio con la prueba de admisión standard (PAS) y obtuvo 900 puntos PAS. Estos dos resultados de las pruebas tienen unidades de medida

57

muy diferentes: los puntos de la prueba PAU varían de cero a 36, y los de la prueba PAS, de 200 a 1 600. Las puntuaciones en bruto para las dos pruebas no pueden compararse directamente. Usando las medias y las desviaciones estándar para ambas pruebas, sin embargo, podemos crear una manera para compararlas. Con los siguientes estadísticos, encontramos que, en comparación con otros aspirantes que contestan estas pruebas, Mary tuvo la puntuación mayor.

X = puntuación de la prueba PAU $\bar{X}$ = 22 puntos PAU s_X = 2 puntos PAU

Y = puntuación de la prueba PAS $\bar{Y}$ = 1 000 puntos PAS s_Y = 100 puntos PAS

La puntuación PAU de 26 que obtuvo Mary tiene una desviación estándar de 2 arriba de la media de aquellos que toman la prueba PAU; es decir, su puntuación está 4 puntos PAU —2 veces 2 desviaciones estándar— sobre el promedio de 22. La puntuación de Jason es de 1 *desviación estándar debajo* de la media de aquellos que contestan la prueba PAS; es decir, su puntuación está 100 puntos PAS —1 desviación estándar— debajo del promedio de 1 000. Sin lugar a dudas podemos otorgarle la beca a Mary. Utilizando las desviaciones estándar como unidades de medida en lugar de "puntos de prueba PAU" y de "puntos de prueba PAS", tenemos una vara de medición común o estándar para ambas variables —de ahí el nombre desviación *estándar*—. ¿Quién le dijo que no podía comparar manzanas con naranjas?

Puntuaciones estandarizadas (puntuaciones Z)

El ejemplo anterior ilustra el hecho de que la puntuación de un sujeto de la investigación en cualquier variable de intervalo/razón puede expresarse de diversas maneras. Primero, lo *expresamos en sus unidades de medida observadas, originales*, como una puntuación en bruto. Por ejemplo, la puntuación en bruto X de Mary es 26 puntos PAU. Segundo, lo *expresamos como una desviación de la media* (es decir, la puntuación de desviación $X - \bar{X}$); la puntuación de desviación de Mary es +4 y significa que ella obtuvo 4 puntos PAU arriba de la media de aquellos que tomaron el PAU. Tercero, expresamos su puntuación como un *número de desviaciones estándar de la media* de la puntuación PAU. Llamamos a esto su puntuación estandarizada (o puntuación Z), que para la variable X se calcula como sigue:

Cálculo de puntuaciones estandarizadas (puntuaciones Z)

$$Z_X = \frac{X - \bar{X}}{s_X}$$

donde

Z_X = puntuación estandarizada para un valor de X
= número de desviaciones estándar que una puntuación en bruto (puntuación X) se desvía de la media
X = una variable de intervalo/razón
$\bar{X}$ = la media de X
s_X = la desviación estándar de X

Si establecemos que X = puntuación PAU con $\bar{X}$ = 22 puntos PAU y s_X = 2 puntos PAU, la puntuación Z de Mary es

$$Z_X = \frac{X - \bar{X}}{s_X} = \frac{26 - 22}{2} = \frac{4}{2} = 2.00 \text{ DE}$$

donde DE quiere decir "desviaciones estándar". Una puntuación Z es la distancia de una puntuación X hacia la media (es decir, su puntuación de desviación) dividida entre la desviación estándar de las distancias.

Una clave para tener claras estas tres maneras de expresar la puntuación consiste en enfocarse en las unidades de medida. Las puntuaciones en bruto y las puntuaciones de desviación para una variable se presentan en la unidad de medida original observada que, por supuesto, es definida por una variable. Por ejemplo, la unidad de medida observada para edad es años; para peso, libras o kilogramos; para altura, pulgadas o centímetros; y así sucesivamente. Pero no importa de qué unidad de medida de una variable se trate, sus puntuaciones Z se miden en DE. La tabla 5-3 resume estas distinciones.

Aquí aparecen algunos ejemplos de una muestra aleatoria de mujeres estudiantes en la universidad local:

1. Donde X = peso, $\bar{X}$ = 120 libras, s_X = 10 libras:

Caso	X (peso)	$X - \bar{X}$ (puntuación de desviación)	Z_X (puntuación estandarizada)
Cheryl Jones	110 libras	–10 libras	–1 DE
Jennifer Smith	125 libras	5 libras	.5 DE
Terri Barnett	107 libras	–13 libras	–1.3 DE

2. Donde Y = altura, $\bar{Y}$ = 65 pulgadas, s_Y = 3 pulgadas:

Caso	Y (altura)	$Y - \bar{Y}$ (puntuación de desviación)	Z_Y (puntuación estandarizada)
Cheryl Jones	64 pulgadas	–1 pulgada	–.33 DE
Jennifer Smith	65 pulgadas	0 pulgadas	0 DE
Terri Barnett	68 pulgadas	3 pulgadas	1 DE

TABLA 5-3 Las diferentes formas en que se pueden presentar las puntuaciones de una variable

Forma de puntuación para una variable y su símbolo	*Unidades de medida de la variable*	*Ejemplo: X = altura*
Puntuación en bruto (puntuación X): X	La unidad de medida de la variable	Pulgadas
Puntuación de desviación = $X - \bar{X}$	La unidad de medida de la variable	Pulgadas
Puntuación estandarizada (Z_X) o "puntuación Z": $Z_X = \frac{X - \bar{X}}{s_X}$	Desviaciones estándar de la variable (DE)	DE

58

Tenga presente que tanto las puntuaciones de desviación como las puntuaciones Z son medidas de la distancia desde la puntuación en bruto de una variable hasta su media. La puntuación de desviación se obtiene restando la media de la puntuación en bruto (es decir, $X - \bar{X}$). Al dividir esta puntuación de desviación entre la desviación estándar, cortamos esta puntuación de desviación en las partes y múltiplos de las desviaciones estándar desde la media. Recuerde que después de calcular la media, calcular las puntuaciones de desviación es lo siguiente que hacemos cuando calculamos la desviación estándar. La esencia de la desviación estándar está en ver una puntuación en bruto individual como una desviación desde la media.

Para obtener un buen sentido de proporción sobre las fórmulas para las puntuaciones de desviación y las puntuaciones Z, examinemos las relaciones entre los tamaños de las puntuaciones en bruto, las puntuaciones de desviación y las puntuaciones Z. Primero, cuanto más lejana de la media esté una puntuación X mayores serán su puntuación de desviación y su puntuación Z. Es más, el signo de cualquier puntuación de desviación y puntuación Z indica la dirección de una puntuación: *ya sea que la observación caiga arriba de la media (la dirección positiva) o debajo de la media (la dirección negativa).* El signo "−" (signo menos) indica que una puntuación en bruto está debajo de la media; el signo "+" (signo más), que está implícito, no escrito, indica que está encima de la media. En los ejemplos anteriores, Cheryl y Terri están debajo del promedio en peso, y Terri está encima del promedio en altura. De hecho, a partir de estas puntuaciones Z podemos decir que Terri es una persona alta, delgada —más de 1 DE debajo en peso, pero 1 DE arriba en altura—. Jennifer tiene altura media; así, su puntuación de desviación y su puntuación Z para Y son cero: ella no se desvía de la altura media.

Puesto que usaremos puntuaciones Z o medidas similares de desviación en cada capítulo en el resto del texto, es prudente practicar cómo calcular puntuaciones de desviación y puntuaciones Z, así como estudiar las direcciones (signos) de esas puntuaciones. Se recomienda una doble verificación. Si una puntuación en bruto queda debajo de la media, su desviación y sus puntuaciones Z son negativas. También tenga presente que las puntuaciones Z son simplemente otra manera de expresar puntuaciones en bruto. Cada puntuación en bruto tiene una puntuación Z correspondiente, y viceversa.

La distribución normal

Además de proporcionar un estándar de comparación entre variables y muestras diferentes, bajo las condiciones apropiadas la media y la desviación estándar ofrecen una riqueza de información. Éste es el caso cuando una variable tiene una distribución de puntuaciones que es normal —formada como la curva de distribución normal—. Como lo definimos en el capítulo 4, una distribución normal es simétrica, con su media, mediana y moda iguales entre sí y localizadas en el centro de la curva. Sin embargo, la simetría o balance en la curva representa la imagen completa. La curva normal también tiene una forma de campana inconfundible, que no es muy plana ni demasiado puntiaguda. Muchas variables se distribuyen

normalmente (como altura, peso e inteligencia). Sin tener en cuenta qué variable se examina, si está normalmente distribuida, posee las propiedades de una curva normal.

Lo que vuelve a la desviación estándar una herramienta estadística tan valiosa es que constituye una parte matemática de la curva normal. Cuando usted sigue la curva desde su centro (es decir, su pico) en cualquier dirección, la curva cambia de forma para acercarse al eje de las X. Desde el pico, el punto en el cual la curva empieza a cambiar hacia afuera es 1 desviación estándar de la media. Este punto se llama punto de inflexión y se destaca en la figura 5-3. Esto indica que la media y la desviación estándar son aspectos matemáticos de un fenómeno natural: la tendencia hacia una distribución normal, en forma de campana para muchos eventos naturales.

Comprender el fenómeno de normalidad es un aspecto importante de la imaginación estadística. Muchos fenómenos que ocurren naturalmente tienen distribuciones de frecuencias que tienen la forma de campana de la curva normal. La curva normal ilustra el hecho de que cuando nos desviamos más allá de la media, esperamos encontrar cada vez menos casos. Para muchas variables, existe un promedio alrededor del cual cae la mayoría de las puntuaciones, y cuando nos alejamos de este promedio, las frecuencias del caso disminuyen. Por ejemplo, la altura física se distribuye normalmente; la mayoría de las personas está cerca del promedio, con unas cuantas personas muy altas y muy bajas.

Uno de los rasgos más sobresalientes del fenómeno de normalidad que ocurre naturalmente es que ofrece predicciones precisas sobre cuántas puntuaciones de una población caen dentro de cualquier rango de puntuaciones. Como se ilustró en la figura 5-3, *para cualquier variable normalmente distribuida:*

1. Cincuenta por ciento de las puntuaciones caen encima de la media; y 50 por ciento, debajo. Esto se debe al hecho de que la mediana es igual a la media.
2. Virtualmente todas puntuaciones caen dentro de 3 desviaciones estándar a partir de la media en ambas direcciones. Ésta es una distancia de 3 puntuaciones Z debajo hasta 3 puntuaciones Z encima de la media, una amplitud total de 6 desviaciones estándar. La cantidad precisa es 99.7 por ciento. El restante 0.3 por ciento de casos (es decir, 3 casos de cada 1 000) caen fuera de 3 desviaciones estándar y, técnicamente, la curva se extiende hacia el infinito en ambas direcciones. (Prácticamente hablando, las puntuaciones para algunas variables, como el peso corporal, tienen límites finitos.)
3. Cerca del 95 por ciento de las puntuaciones de una variable normalmente distribuida caen dentro de una distancia de 2 desviaciones estándar en ambas direcciones de la media. Esto es más menos 2 puntuaciones Z de la media.
4. Aproximadamente 68 por ciento de las puntuaciones de una variable normalmente distribuida caen dentro de una distancia de 1 desviación estándar (más menos 1 puntuación Z), en ambas direcciones de la media.

Tenga presente que la distribución normal tiene características muy predecibles. *Si una variable se distribuye en esta peculiar forma de campana,* podemos utilizar los estadísticos de la muestra y lo que sabemos respecto de la curva normal, para estimar cuántas puntuaciones *en una población* caen dentro de cierto rango.

64

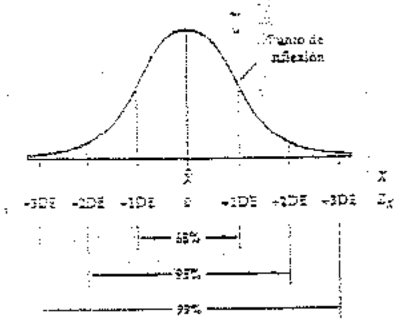


FIGURA 5-3
La relación de la desviación estándar con la curva normal

Para ilustrar la utilidad de la curva normal, sigamos el ejemplo anterior, una muestra de mujeres estudiantes de la universidad local, donde X = peso, el peso medio es de 120 libras, y s_X = 10 libras. Primero, necesitamos asegurarnos de que la distribución de puntuaciones es, de hecho, normal; es decir, que tenga forma de campana. Esto podría hacerse produciendo un histograma de puntuaciones de una muestra (no mostrado). Si este gráfico aproximadamente tiene forma de campana, suponemos que esta variable no sólo está normalmente distribuida en la muestra, sino también en la población. Nos referimos a este hecho como "asumiendo la normalidad". (La forma de un histograma de la muestra puede ser ligeramente fuera de lo normal como resultado del error muestral.) Como se grafica en la figura 5-4, asumiendo la normalidad, podemos hacer las siguientes estimaciones de los pesos de la población de mujeres estudiantes en la universidad local:

1. La mitad de estas estudiantes pesa arriba de 120 libras.
2. Cerca de 68 por ciento de las mujeres estudiantes de la universidad local pesan entre 110 y 130 libras.

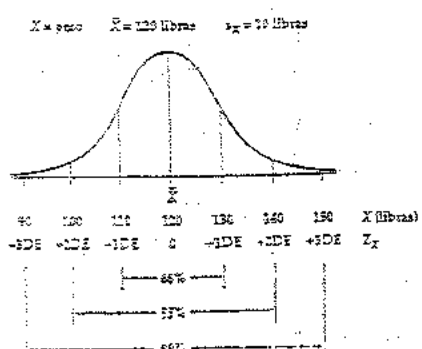


FIGURA 5-4
Uso de la curva normal para estimar el peso (X) en la distribución de mujeres estudiantes en la universidad local

3. Aproximadamente 95 por ciento de las mujeres estudiantes de la universidad local pesan entre 100 y 140 libras.
4. Muy pocas pesan menos de 90 libras o más de 150 libras.

Recuerde, una puntuación Z simplemente es una forma de expresar una puntuación en bruto (es decir, la puntuación de una observación individual). Si Susannah pesa 110 libras, ella está 1 DE debajo del promedio y tiene una puntuación Z de -1.00 DE.

Uso de la curva normal como una distribución de probabilidad

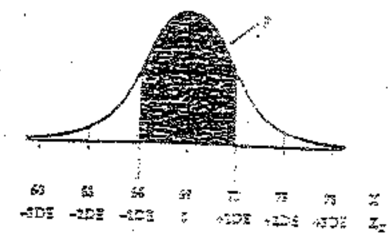
Pensamiento proporcional respecto de un grupo de casos y casos únicos

Como observamos en el capítulo 5, la desviación estándar sirve para examinar la forma en que las puntuaciones se dispersan en una distribución, y para comparar la dispersión de dos o más muestras. Sin embargo, podemos lograr mucho más con la desviación estándar. Con una sola variable de intervalo/razón *que tenemos razón para creer que está normalmente distribuida en su población*, podemos calcular puntuaciones estandarizadas (puntuaciones Z) y usarlas para determinar la proporción (p) de puntuaciones de una población que caen entre cualesquiera dos puntuaciones en la distribución. Puesto que la curva normal tiene una forma inconfundible, podemos identificar y medir áreas porque éstas representan una proporción de casos.

Recuerde del capítulo 5 que una puntuación Z nos dice cuántas desviaciones estándar está alejada una puntuación bruta (o puntuación X) de la media:

$$Z_x = \frac{X - \overline{X}}{s_x} = \text{número de desviaciones estándar (DE) desde la media}$$

64



Notamos que apenas el 68 por ciento de los casos en una población normalmente distribuida tienen puntuaciones X dentro de una distancia de 1 desviación estándar en ambos lados de la media (es decir, entre una puntuación Z de más y menos 1). Por ejemplo, suponga que tenemos la siguiente información, donde X = estatura para una muestra de hombres en un club deportivo:

$$\overline{X} = 69 \text{ pulgadas} \quad s_x = 3 \text{ pulgadas} \quad \text{La distribución es normal}$$

Puesto que esta distribución es normal, usamos la curva normal para obtener un sentido de proporción respecto de cuántos hombres son tan altos. Nuestro conocimiento básico de la curva normal nos dice que casi 68 por ciento están entre 66 y 72 pulgadas, como se indica en la curva de la figura de arriba. Es más, ya que la mediana se localiza en la media, sabemos que la mitad de los hombres están debajo de las 69 pulgadas (cinco pies, nueve pulgadas) y la otra mitad está arriba. Y como casi el 99 por ciento de una población normalmente distribuida cae dentro de tres puntuaciones Z en ambos lados de la media, muy pocos son más bajos que 60 pulgadas o más altos que 78 pulgadas.

Así,

$$p\,[\text{de } X = 66 \text{ a } X = 72] = \text{aproximadamente } 68\%$$

De hecho, con la ayuda de una tabla estadística, podemos calcular puntuaciones Z y usarlas para determinar cualquier área bajo la curva. Este procedimiento se llama partición de áreas bajo la curva normal, y en breve haremos algunas particiones.

Como resulta, las áreas bajo la curva normal representan probabilidades de ocurrencia. Observe que utilizamos el símbolo p para representar proporciones y probabilidades. Las probabilidades son proporciones del número de veces que se tiene éxito de todas las posibles ocurrencias. Conocer la proporción de éxito de la población en conjunto nos da la probabilidad de éxito por un solo sujeto. En otras palabras, un área especificada bajo la curva normal proporciona la probabilidad de ocurrencia de cualquier puntuación sola que cae entre cualesquiera dos valores.

Para ilustrar esta relación, suponga que estamos matando el tiempo en el club deportivo. Para entretenernos, jugamos un extraño juego llamado "adivine la estatura." Las reglas del juego son tales que cuando oímos a alguien acercarse desde la esquina, suponemos su estatura y después se la preguntamos cuando se acerca. Si estamos dentro de 3 pulgadas de la estatura correcta, ganamos.